

COMBIEN LE CYLINDRE A-T-IL D'ARÊTES ?

Ou que peut apporter une analyse didactique à une préparation de séance

Karine Millon-Fauré

UMR P3 ADEF-Université de Provence, IFE (ex-INRP)

Résumé : Cet article s'intéresse aux outils dont dispose l'enseignant pour construire ses séances. Nous montrons sur un exemple concret que les instructions officielles et les documents contenus dans les manuels ne suffisent pas toujours pour juger de la pertinence des choix de l'enseignant. Nous exposons comment une étude d'un point de vue didactique peut utilement compléter ces informations de manière à repérer les éventuelles failles de ses activités. Nous confrontons ensuite nos analyses au déroulement effectif de la séance pour éprouver la justesse de nos prévisions. Ceci nous amène à nous interroger sur l'aide qui pourrait être apportée aux enseignants, d'une part sous forme d'une formation à certains outils didactiques (comme l'analyse a priori), d'autre part en leur fournissant les savoirs mathématiques nécessaires pour enseigner.

Mots-clés : didactique des mathématiques, analyse a priori, transposition, milieu, savoir à enseigner / savoir pour enseigner / savoir savant

Introduction

La "réforme" dite de la maîtrise dans les IUFM a replacé sur le devant de la scène la question de la formation des enseignants, déjà maintes fois remise en cause. Yves Matheron et Robert Noirfalise (Matheron & Noirfalise, 2006) avaient souligné l'intérêt de certaines connaissances en didactique pour la constitution d'un savoir professionnel et conseillaient notamment d'inclure dans la formation initiale et continue des enseignants une présentation de la théorie anthropologique du didactique :

« la théorie anthropologique du didactique permet, en jetant les bases d'un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques, de s'engager dans ces gestes à bon escient, sous le contrôle d'un savoir établi et commun, et non de manière aléatoire selon l'inspiration du moment ».

Nous cherchons à prouver ici l'aide que peut également constituer pour l'enseignant *l'analyse a priori*. Pour cela, nous avons étudié, sur un exemple concret, comment une analyse a priori aurait pu permettre à l'enseignant d'anticiper le déroulement de sa séance et d'interroger en amont certains de ses choix. Nous avons ensuite confronté nos prévisions à l'observation de la séance et nous avons pu constater que la plupart des phénomènes que nous avons anticipés avaient effectivement perturbé l'activité de la classe, au point même de compromettre l'efficacité de l'enseignement et de conduire élèves et enseignants vers des erreurs sur le plan mathématique.

1. Cadres théoriques et hypothèses

1.1 Problématique

Les enseignants s'appuient habituellement, pour construire leurs séances, sur les instructions officielles énoncées dans les programmes ou sur les ressources proposées par les manuels scolaires.

Or nous pensons que ces informations, toutes intéressantes qu'elles soient, s'avèrent parfois insuffisantes. Nous chercherons à montrer que certaines activités constituées à partir de ces seuls éléments comportent encore des failles, plus ou moins lourdes de conséquences, que certaines théories didactiques auraient permis de repérer. Berté, Chagneau, Desnavres, Lafourcade et Sageaux (2004) ont déjà illustré, sur l'exemple d'une leçon portant sur la trigonométrie, comment certaines notions didactiques pouvaient s'avérer essentielles lors de la conception d'une activité :

« Au travers d'un exemple de leçon sur le cosinus en quatrième au collège, nous montrons comment des concepts de didactique peuvent aider les enseignants à analyser et surtout construire des situations d'apprentissage où les élèves font vraiment des mathématiques. Nous explicitons notamment comment le concept de problématique en géométrie nous a amenés à modifier nos situations, pour les adapter à ce que les élèves sont capables de faire en quatrième. »

Ces chercheurs insistent sur l'importance du choix du milieu (qui doit permettre aux élèves de construire, avec l'aide de l'enseignant, les savoirs visés) et notamment sur la sélection des variables didactiques. Nous voudrions prolonger cette discussion en montrant comment l'analyse a priori d'une préparation de séance permet de pointer certains points litigieux que les outils habituellement à la disposition des enseignants ne suffisent pas à révéler.

1.2 Analyse a priori

L'analyse a priori (Artigue, 1990) est un apport de la TSD (théorie des situations didactiques) qui l'a introduite comme outil d'anticipation relativement à l'adéquation d'une situation au savoir visé, et au déroulement prévu. Cette analyse a donc entre autres pour objectif de prévoir les difficultés d'enseignement et d'apprentissage qui pourraient survenir au cours d'une séance. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'analyse a priori et ont donné leur propre interprétation de cet outil (Chevallard, Conne, Robert). Nous considérerons ici l'analyse a priori du point de vue de la théorie de l'Action Conjointe. Mercier & Assude (2007) montrent l'intérêt de cette anticipation pour étudier les enjeux de toute relation didactique :

« elle permet de rendre visible un certain nombre de phénomènes didactiques en confrontant l'observation contingente à la construction anticipée selon les catégories théoriques ».

Pour effectuer une analyse a priori, Mercier & Assude (ibid) proposent essentiellement, à la suite de Margolinas (1994), deux types d'étude :

« Pour analyser notre corpus, nous avons procédé de la manière suivante. Nous avons mené une analyse a priori du savoir, en trois temps : (1) une analyse descendante qui nous permet d'analyser le savoir supposé être l'enjeu du jeu (enjeux mathématique et institutionnel) ; (2) une analyse ascendante qui nous permet de voir les possibles techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre (les jeux possibles de l'instance élève) ; (3) ces deux types d'analyse nous permettent de voir certains problèmes didactiques auxquels les professeurs peuvent être confrontés (les jeux possibles de l'instance professeur sur celle de l'élève). » (Mercier & Assude, 2007, p156)

Nous nous concentrerons dans cet article sur les deux premières étapes et nous pointerons au fur et à mesure les problèmes didactiques potentiels au lieu de les isoler dans un troisième temps de l'analyse.

Le premier temps, appelé analyse a priori *descendante*, consiste à étudier le savoir mis en jeu afin

de déterminer les potentielles difficultés de résolution des problèmes proposés. Nous regarderons donc les savoirs savants correspondant aux savoirs à enseigner de cette séance, ainsi que la transposition que l'enseignant en a faite afin de déceler d'éventuels problèmes conceptuels. En effet, un enseignant ne peut enseigner directement à ses élèves un savoir savant, c'est-à-dire le savoir tel qu'il est utilisé par les chercheurs. Il se doit de le remodeler, de l'adapter de manière à le rendre accessible à son public. En passant d'une institution à l'autre, le savoir va subir des transformations. C'est ce que Chevallard (1992) appelle la transposition didactique. Un même savoir savant peut être transformé en savoir à enseigner de plusieurs manières et ces choix conditionneront les chances de succès de l'enseignement (l'échec de la réforme des 'mathématiques modernes' en a d'ailleurs apporté la preuve).

A première vue, les programmes officiels semblent prendre en charge cette transposition didactique, puisqu'ils listent pour chaque niveau et chaque discipline les contenus à enseigner. Les documents d'accompagnement regorgent même de conseils sur la manière de présenter ces savoirs, au point que l'on pourrait penser ces outils suffisants pour construire une séquence d'enseignement. Nous pensons pourtant que tel n'est pas le cas.

Le deuxième temps s'appelle *analyse a priori ascendante* :

« Cette analyse permet d'imaginer certaines stratégies de réussite possibles et de suivre les tentatives des élèves pour les réaliser. Elle devrait être reprise après coup si une stratégie nouvelle apparaissait parce que cela montrerait soit, que les élèves disposent de techniques auxquelles nous n'avions pas pensé soit, que le problème relève pour eux d'un domaine de pratiques que nous n'avions pas imaginé, notre analyse étant orientée par l'analyse mathématique de premier niveau. » (Mercier & Assude 2007)

Cette étude cherche à anticiper les productions orales ou écrites des élèves, à cerner les éventuelles difficultés ou les erreurs potentielles, voire à déceler les risques de ruptures du contrat didactique. Si l'enseignant veut illustrer l'intérêt d'un savoir ou d'une technique, il est important de se demander à quelles autres stratégies les élèves pourront avoir recours et si ces dernières ne s'avèreront pas tout aussi efficaces. Ces considérations conduisent donc à réfléchir aux régulations possibles et à interroger la pertinence de l'activité choisie.

Ceci nous amènera à analyser les *milieux* car ils conditionnent pour une grande part les stratégies potentiellement accessibles aux élèves. Nous parlons ici de milieux au sens de Sensevy :

« Il faut, selon moi, différencier les notions selon que le mot [*milieu*] fait référence à l'environnement cognitif commun (aux deux joueurs A et B, pour reprendre ce qui précède), ou aux ressources et contraintes qui orientent les transactions dans le jeu *hic et nunc* » (Sensevy, 2007)

En effet ces deux types de milieux influent sur le déroulement du jeu. Toutefois, dans cet article nous nous intéressons essentiellement au milieu matériel mis en place par l'enseignant et nous regardons son influence sur le travail des élèves. Le changement d'une variable didactique peut ainsi discréditer telle stratégie ou au contraire la rendre beaucoup plus efficace que telle autre : si l'enseignant demande à partager treize bonbons en quatre paquets, un simple dessin peut conduire à la solution alors que cette stratégie s'avèrera peu judicieuse pour partager sept cents quatre-vingt-treize bonbons en quatre paquets. Il sera donc intéressant de se demander si les stratégies potentiellement observables compte tenu du milieu matériel disponible s'avèrent conformes aux attentes de l'enseignant et si la stratégie correspondant au savoir visé se révèle effectivement plus 'intéressante' que les autres (plus simple, plus rapide ou plus sûre..). Cette analyse apporte un éclairage spécifique et selon nous indispensable sur la préparation de l'enseignant.

Toutes ces réflexions nous conduisent à formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse : les outils mis à la disposition des enseignants ne suffisent pas pour concevoir une transposition didactique satisfaisante et un milieu pertinent pour l'enseignement : une analyse a priori s'avère souvent nécessaire.

2. Première étude d'une préparation de séance

2.1 Le dispositif

Pour éclairer cette question, nous allons étudier une préparation de séance conçue par un enseignant de mathématiques ordinaire. Nous confrontons tout d'abord ses choix aux outils mis à sa disposition, à savoir les instructions officielles et les activités présentées par le manuel scolaire, afin de voir si cet enseignant a effectivement tiré profit de toutes les informations dont il disposait. Dans un deuxième temps, nous analysons cette préparation de séance au moyen de certains outils didactiques concernant la transposition des savoirs et le milieu afin de voir si ce nouvel éclairage nous apporte des informations supplémentaires quant à la pertinence de la séance envisagée. Enfin nous rendons compte de l'observation de la séance de classe durant laquelle cette activité a été mise en place, afin de déterminer si l'analyse d'un point de vue didactique s'avère conforme à la réalité.

La classe observée est une classe de sixième d'un collège ambition réussite dans un quartier défavorisé de Marseille. Elle accueille de nombreux élèves en grande difficulté scolaire, notamment des élèves issus de l'immigration et qui éprouvent encore des difficultés dans le maniement de notre langue. La séance considérée a été choisie et construite librement par l'enseignant (nous ne nous sommes pas entretenus avec lui avant la séance afin de ne pas l'influencer). Il lui a juste été demandé de fournir la préparation de séance. Il s'agit d'une séance d'introduction à la géométrie dans l'espace en sixième. L'enseignant a choisi d'ouvrir cette séquence par une réactivation des termes 'face', 'arête', 'sommet' (pour plus de renseignements concernant cette expérimentation, se reporter à la thèse Millon-Fauré 2011, dont est tirée cette observation). La préparation de séance fournie se trouve en annexe. Nous nous intéresserons essentiellement dans cet article à la première partie de cette leçon jusqu'à l'étape 5 comprise, c'est-à-dire à la caractérisation d'un solide parmi une collection au moyen d'une description.

2.2 Les instructions officielles

Nous allons confronter cette préparation aux instructions officielles. Dès la fin du cycle des apprentissages fondamentaux de l'école primaire, les élèves devraient savoir :

« distinguer un cube ou un pavé droit, de manière perceptive, parmi d'autres solides » (Bulletin Officiel du 12 Avril 2007 n°5).

Aucune autre précision n'est donnée sur la nature des 'autres solides' mais dans le hors-série n° 3 du 19 juin 2008, il est précisé :

« Si les compétences attendues en fin de cycle ne concernent que quelques figures et solides, les problèmes proposés portent sur d'autres objets : quadrilatères particuliers tels que le trapèze, le "cerf-volant", le parallélogramme ; solides tels que le **prisme**, la pyramide, la sphère, le **cylindre**, le cône ».

On peut donc penser qu'il s'agit là des 'autres solides' parmi lesquels les élèves doivent pouvoir distinguer les pavés droits. Les termes 'face', 'arête', 'sommet' sont déjà mentionnés :

« connaître et savoir utiliser le vocabulaire approprié : cube, pavé droit, face, arête, sommet. » (Bulletin Officiel du 12 Avril 2007 n°5).

On retrouve ces mêmes objectifs dans le cycle des approfondissements (Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008) :

- « Les solides usuels : cube, pavé droit, cylindre, prismes droits, pyramide.
- reconnaissance de ces solides et étude de quelques patrons ;
- vocabulaire spécifique relatif à ces solides : sommet, arête, face. »

Dans ce document, on parle même de *description* de solides :

- « - décrire un solide en vue de l'identifier dans un lot de solides divers ou de le faire reproduire sans équivoque »

L'activité proposée par l'enseignant que nous observons est donc bien conforme aux instructions officielles de l'école primaire, du moins en ce qui concerne la première partie. En sixième, plusieurs des compétences précédentes sont reprises. Parmi les compétences exigibles au palier 3 (fin 5^e), on trouve :

- « connaître et représenter des figures géométriques et des objets de l'espace. Utiliser leurs propriétés ».

Dans le socle commun, il est précisé que les élèves doivent connaître :

- « les propriétés géométriques élémentaires des figures planes et des solides suivants : carré, rectangle, losange, parallélogramme, triangle, cercle, cube, parallélépipède rectangle, cylindre, sphère » (le socle commun de connaissances et de compétences ; décret du 11 juillet 2006).

Le bulletin officiel du 28 Août 2008 insiste sur la poursuite du travail amorcé en primaire et notamment sur la description des solides :

- « A l'école élémentaire les élèves ont déjà travaillé sur les **solides droits** de l'espace (**description**, construction, patron). Cette étude est poursuivie en 6e en mettant l'accent sur un aspect nouveau : la représentation en perspective cavalière dont certaines caractéristiques sont précisées aux élèves.»

Aux objectifs de l'école primaire, s'ajoute donc la lecture de représentations cavalières, notamment en ce qui concerne l'identification des faces et des arêtes du parallélépipède rectangle :

- « reconnaître dans une représentation en perspective cavalière du parallélépipède rectangle [...] les arêtes, les faces parallèles ou perpendiculaires »

Si les compétences attendues ne concernent que cette famille de solides, les commentaires précisent que les travaux devront s'appuyer sur différents '*objets de l'espace*'. Quels sont les solides désignés par les expressions '*objets de l'espace*' et un peu plus loin '*solides simples*' ou '*solides usuels*' ? On peut supposer qu'il s'agit des solides qui figurent dans les programmes d'une des années de collège, à savoir les prismes droits, les pyramides, les cylindres, les cônes, les sphères. Voici qui justifie la deuxième partie de l'activité proposée par l'enseignant (le dénombrement des faces/ arêtes/ sommets sur les représentations en perspective cavalière de divers solides).

La description de solides et la lecture de perspectives cavalières figurent également dans les programmes des niveaux suivants, même si le champ des solides à connaître s'étend (prisme, cylindre...) :

- « comme en classe de sixième, l'objectif est d'entretenir et d'approfondir les acquis : représenter, décrire et construire les solides de l'espace en particulier à l'aide de patrons. [...] Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière d'un prisme droit les arêtes de même longueur [...] ».

Les termes de 'face' et 'arête' figurent d'ailleurs encore dans les programmes de troisième (concernant les sections) ce qui entérine l'importance de leur maîtrise par les élèves. Au vu des instructions officielles, l'activité proposée par l'enseignant (des descriptions de solides usuels pour motiver l'utilisation des notions de face, arête et sommet) paraît donc tout à fait pertinente.

2.3 Les manuels scolaires

Regardons les activités proposées sur ce thème dans les manuels scolaires. Certaines activités proposent directement de travailler sur les notions de faces/ arêtes / sommets. Ainsi Phare ou le site Mathsenligne demandent aux élèves de chercher la nature des faces de certains solides ou de dénombrer leurs faces/arêtes/sommets.

D'autres activités réactivent les termes 'face', 'arête', 'sommet' au travers d'une description de solide. Dans le manuel « Triangle » 6^e de chez Hatier (2005) (voir annexe 2), les élèves doivent retrouver, parmi une collection donnée, un solide décrit à partir de son nombre de faces, arêtes et sommets. Mis à part le fait que les descriptions sont ici données par le manuel et non conçues par un élève, la consigne est très proche de celle proposée dans l'activité étudiée. Dans « Les mathématiques à l'école primaire » (Xavier Roegiers, 2000; voir annexe 3), un élève doit décrire l'un des solides d'une collection donnée afin que ses camarades le retrouvent. La seule différence avec l'activité proposée réside dans le choix de la collection qui se compose ici d'objets usuels. Précisons également que dans ces deux ouvrages, les collections sont composées non pas de véritables solides mais de leurs représentations. Le manuel Cap Maths CM1 (Hatier) (voir annexe 4) propose aux élèves de poser des questions à l'enseignant pour retrouver, dans une collection donnée, l'un des solides dont le nom a été caché dans une enveloppe. De même, Euro Maths CM1 (Hatier) (voir annexe 5) conseille à l'enseignant de proposer aux élèves la description d'un solide pour qu'ils le retrouvent dans une collection donnée. L'activité conçue par l'enseignant ressemble donc à celles proposées dans les manuels scolaires et celui-ci peut raisonnablement penser, à partir des outils dont il dispose, que ses choix sont pertinents.

Regardons à présent ce que nous apprend une analyse a priori :

3. Analyse a priori de la préparation de séance

Nous allons tout d'abord effectuer une analyse a priori descendante de l'activité envisagée par l'enseignant dans sa préparation, c'est-à-dire que nous allons étudier les savoirs mathématiques savants qui sous-tendent l'activité.

3.1 Analyse a priori descendante : intérêt des notions de 'face', 'arête', 'sommet'

Ces notions sont notamment utilisées pour définir certains polyèdres. On classe ainsi les polyèdres suivant leur *nombre de faces*, appelé l'*ordre* du polyèdre, en utilisant les suffixes grecs suivants : *tétra* pour quatre (ce qui donne tétraèdre), *hexa* pour six (hexaèdre), *octa* pour huit, *dodéca* pour douze, *icosa* pour vingt... Utiliser le dénombrement des faces pour caractériser un solide semble donc pertinent. Comme deux solides distincts peuvent avoir le même nombre de faces, il paraît légitime de s'intéresser également au nombre d'arêtes et de sommets pour les distinguer.

Toutefois ce système de descripteurs (le nombre de faces, arêtes, sommets) s'avère moins performant qu'il n'y paraît. On notera tout d'abord que la donnée de ces trois informations n'est pas nécessaire puisque une des données peut se déduire des deux autres. En effet, la formule de la caractéristique d'Euler nous apprend que pour un polyèdre convexe, on a :

$$S - A + F = 2 \text{ où } S \text{ est le nombre de sommets, } A \text{ le nombre d'arêtes et } F \text{ le nombre de faces.}$$

Par conséquent, si l'on connaît le nombre de faces et d'arêtes, on peut facilement trouver le nombre de sommets (un polyèdre convexe qui a, par exemple, six faces et douze arêtes a nécessairement huit sommets) et un des trois descripteurs est donc redondant par rapport aux deux autres.

Par ailleurs, ces trois descripteurs (nombre de faces, arêtes, sommets) ne sont pas toujours suffisants pour caractériser un solide. Certaines déformations d'un polyèdre conservent le nombre de faces, arêtes et sommets : le cube et le parallélépipède non cubique ont ainsi le même nombre de faces, arêtes et sommets.

C'est pourquoi, pour caractériser certains polyèdres ou classes de polyèdres, on ne se contente généralement pas du dénombrement des faces, arêtes et sommets mais on ajoute certaines de leurs propriétés. Ainsi un cube est un polyèdre dont *toutes les faces sont des carrés*. Un polyèdre est dit régulier si toutes ses *faces* sont des polygones réguliers de même type et si tous ses *sommets* sont de même degré, c'est-à-dire si tous les sommets reçoivent le même nombre *d'arêtes*. De même le code de Schläfli d'un sommet est défini par la suite des ordres des *faces* aboutissant à ce sommet : par exemple $3^3.4.3.5$ signifie que trois triangles, un quadrilatère, un triangle et enfin un pentagone aboutissent à ce sommet. Or ce code et la longueur d'une arête définissent entièrement un polyèdre régulier.

La définition des solides de Platon illustre également l'intérêt des notions de faces, arêtes, sommets :

Un polyèdre convexe est un solide de Platon si et seulement si

- toutes ses **faces** sont des polygones réguliers convexes isométriques, c'est-à-dire superposables,
- Aucune de ses **faces** ne se coupe, excepté sur les **arêtes**
- Le même nombre de **faces** se rencontrent à chacun de ses **sommets**.

Notons toutefois que la donnée de la nature des faces ne suffit pas toujours pour caractériser un solide. Euclide (Éléments ; réédition 2002) pensait que l'on pouvait confondre deux polyèdres qui auraient leurs faces deux à deux égales, mais deux polyèdres, même convexes, ayant des faces isométriques deux à deux ne sont pas forcément isométriques. Un contre-exemple est fourni par le cuboctaèdre et le pseudo-cuboctaèdre. Si toutes les faces sont deux à deux identiques, leur agencement diffère : dans le cuboctaèdre toute face carrée n'est bordée que par des faces triangulaires, ce qui n'est pas le cas dans le pseudo-cuboctaèdre.

Nous voyons donc que les notions de face, arête, sommet s'avèrent utiles pour caractériser certaines classes de polyèdres, même si le type d'informations nécessaires pour les définir varie en fonction des cas (dénombrement des faces/arêtes/sommets, information sur la nature des faces, leur agencement etc...). Si l'on veut faire sentir aux élèves l'intérêt des notions de faces/ arêtes/ sommets, leur demander de caractériser un solide dans une collection peut donc se révéler judicieux à condition toutefois que la collection choisie permette des caractérisations simples au moyen de ces descripteurs. Dans la préparation de séance considérée, la présence du cube et du pavé droit dans la même collection rend le système de descripteurs (nombre de faces ; nombre d'arêtes ; nombre de sommets) insuffisant. Il faudra recourir à des informations supplémentaires, par exemple sur la nature des faces ce qui, ici, permettra de caractériser chaque polyèdre de la collection.

3.2 Analyse a priori descendante : les arêtes du cylindre

Nous allons voir à présent que la question qui ouvre cet article ‘combien le cylindre a-t-il d’arêtes ?’ s’avère plus délicate qu’il n’y paraît au premier abord. Regardons tout d’abord ce que signifie le terme ‘arête’ :

« [Un polyèdre est un] corps terminé de toutes parts par des surfaces planes. Ces surfaces se nomment les faces du polyèdre et l’intersection commune de deux faces adjacentes prend le nom de côté ou d’arête. » (A. Dénain, 1836)

Plus récemment, D.-J. Mercier (2008) définit pour les polyèdres convexes les termes de face, arête, sommet :

« Un polyèdre convexe (fermé) est une partie non vide et bornée de l’espace obtenue comme intersection d’un nombre fini de demi-espaces fermés. Un point est un sommet du polyèdre s’il appartient à celui-ci et à l’intersection d’au moins trois frontières de demi-espaces fermés définissant le polyèdre. Une arête du polyèdre est un segment joignant deux sommets et inclus dans l’une des frontières des demi-espaces fermés définissant le polyèdre » (D. Mercier, 2008)

Par conséquent, le terme ‘arête’ n’est défini que pour un polyèdre et dans la mesure où le cylindre n’est pas un polyèdre, la question ‘combien le cylindre a-t-il d’arêtes’ n’admet pas, à première vue, de réponse. On peut toutefois se demander si l’on ne pourrait pas prolonger les notions de ‘face’, ‘arête’, ‘sommet’ pour des solides autres que les polyèdres. Mais les prolongements de ces termes, même en se restreignant à la géométrie euclidienne, peuvent être multiples. On pourrait par exemple définir un solide comme un corps limité par des surfaces appelées faces : le cylindre aurait alors trois faces. Si l’on décide ensuite de définir un sommet comme le point d’intersection d’au moins trois faces et une arête comme le segment joignant deux sommets, à la question ‘*combien le cylindre a-t-il d’arêtes?*’, on doit répondre « aucune ».

Si par contre on définit les arêtes comme les intersections de deux faces adjacentes, *la réponse à la question précédente devient « deux arêtes circulaires »*. On obtient également cette réponse si l’on cherche à définir les arêtes comme l’ensemble des singularités de toutes les courbes correspondant aux intersections du solide et d’un plan quelconque. Plus intuitivement, on trouve encore deux arêtes circulaires pour le cylindre si l’on considère les arêtes d’un solide comme des éléments du contour de dimension 1 qui demeurent inchangés lors de petits déplacements : lorsque l’on marche sur un solide, la ‘ligne d’horizon’ se déplace continuellement (comme par exemple sur la sphère) sauf lorsqu’il s’agit d’une arête.

Mais l’expression ‘arête du cylindre’ a également pris d’autres significations dans la littérature. Ainsi, si l’on se plonge dans l’encyclopédie des gens du monde (1836), l’on trouve des formules de ce type :

« L’aire de la surface latérale d’un cylindre droit a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par une arête [...] Le volume d’un cylindre s’obtient en multipliant la base par une arête. » (A. de Montor, 1836, p.392).

Par conséquent, d’après cet ouvrage, les arêtes du cylindre correspondent à ses génératrices et *ce solide a une infinité d’arêtes toutes de la même longueur*. Le traité de géométrie descriptive nomme aussi ‘arête’ les génératrices du cylindre puisqu’il explique (Hachette, 1822, p.48) qu’un plan tangent au cylindre passe par l’une de ses arêtes, mais sans préciser s’il existe ou non d’autres arêtes dans le cylindre. Le cours d’analyse de l’Ecole Polytechnique (C. Sturm, 2010, p.416) définit lui les arêtes de rebroussement : « toute surface développable est le lieu des tangentes à une certaine courbe nommée arête de rebroussement de la surface ». Dans le cylindre infini, chaque génératrice peut être vue comme la tangente à une courbe qui n’est autre qu’elle-même : les génératrices

constituent donc l'ensemble des arêtes du cylindre infini.

Enfin l'encyclopédie des gens du monde (A. Montor, 1836) présente une nouvelle perspective :

« un cylindre peut s'envisager comme un prisme régulier d'un nombre infini de faces latérales dont la largeur est infiniment petite. »

L'ouvrage « les mathématiques à l'école primaire (Tome 2) » (Roegiers, 2000) reprend ce point de vue et définit le cylindre comme :

« la limite d'un prisme régulier [...] lorsque le nombre de côtés de la base tend vers l'infini , c'est-à-dire lorsque la base tend vers un disque. » (X. Roegiers, 2000).

Si l'on nomme 'arêtes du cylindre' l'ensemble obtenu lors du passage à la limite de l'ensemble des arêtes de ces prismes, on obtient en plus des génératrices, une infinité d'arêtes infiniment petites qui forment deux cercles.

Ce problème de domaine de définition d'une notion et de ses prolongements possibles, quoique très intéressant sur le plan mathématique, paraît difficilement abordable en sixième et l'on peut donc se demander comment l'enseignant réagira lorsque les élèves chercheront à dénombrer les faces/arêtes/ sommets du cylindre. La décision de placer dans la collection choisie un cylindre risque donc de perturber profondément l'activité de la classe.

Cette première étude nous montre que les savoirs à enseigner dans cette séance ne correspondent plus aux savoirs savants dont ils sont issus. La transposition effectuée par l'enseignant soulève des questions qui risquent fort de perturber l'activité des élèves.

Il serait à présent intéressant d'effectuer l'analyse a priori ascendante (Mercier & Assude, 2007) pour prévoir les réactions des élèves. Comme les stratégies possibles et probables dépendent grandement des milieux choisis, nous aborderons cette problématique à travers l'étude du milieu matériel.

3.3 Analyse a priori ascendante : décrire un solide

Quelle sera la réaction des élèves face à la consigne : « décrire un solide » ? Vont-ils tous comprendre la tâche attendue ? Comme cela a été souligné dans Mercier & Tonnelles (1992 & 1993), même si les activités de description d'objets géométriques constituent un des objectifs fondamentaux de l'enseignement des mathématiques au collège, cette pratique s'avère plus délicate qu'il n'y paraît. Notons tout d'abord que les formes de description diffèrent fortement suivant les situations (dans la vie courante, on désigne généralement un objet par son nom générique, voire éventuellement par une description de sa fonctionnalité, de sa taille ou de sa couleur) ou les disciplines scolaires (si l'éloquence est généralement considérée comme une qualité dans les matières littéraires, elle l'est beaucoup moins en mathématiques). Même en se restreignant au champ des mathématiques, les descriptions d'un même objet géométrique peuvent prendre de multiples formes en fonction de leur objectif : s'agit-il de définir un objet, de le caractériser dans une collection donnée (et dans ce cas, tout dépend de la collection choisie), d'utiliser certaines propriétés de la figure pour appliquer un théorème... ?

« La figure est une sorte d'auberge espagnole où chacun voit ce qu'il veut, et à la question 'Que remarques-tu?' on ne peut que répondre 'Tout!' » (Mercier-Tonnelles, 1993)

Or, ici, les descriptions attendues sont bien spécifiques. Elles doivent tout d'abord vérifier certaines règles *constitutives* du jeu (Sensevy, 2007) : il est interdit de nommer le solide, de le montrer, de le désigner par son numéro... A cela s'ajoutent certaines contraintes qui sans être incontournables, s'avèrent utiles pour gagner au jeu : les *règles stratégiques*. Pour correspondre à une stratégie gagnante, la description doit permettre de distinguer un élément parmi une collection donnée :

certaines informations s'avèrent donc inutiles (la couleur ou la matière dans laquelle est faite le solide...) ou redondantes par rapport à des informations données précédemment. A contrario, certaines descriptions peuvent s'avérer insuffisantes. En effet, celles-ci doivent contenir suffisamment d'informations pour que l'ensemble des objets de la collection vérifiant ces propriétés se réduise à un seul élément. Il convient donc de comprendre comment la donnée de certaines propriétés permet de réduire le champ des possibles jusqu'à ce qu'il ne contienne plus que l'élément choisi. Là se situe une réelle difficulté : appréhender la spécificité des descriptions attendues nécessite une bonne compréhension de l'enjeu de la situation qui risque d'échapper à certains élèves.

Ceci risque de compromettre la dévolution de l'activité aux élèves et leur investissement dans un travail personnel efficace. Toutefois le choix du milieu matériel interdit à l'enseignant d'effectuer un tour en classe entière avant de laisser les élèves en autonomie : comme il n'y a ici que quatre solides, travailler, au préalable, sur la description de l'un d'entre eux compromettrait l'intérêt du jeu. Une autre collection de solides (plus fournie) aurait pu permettre de faciliter le déroulement du cours.

3.4 Analyse a priori ascendante : les stratégies gagnantes pour le jeu proposé

Compte tenu de la collection choisie par l'enseignant, plusieurs stratégies peuvent s'avérer gagnantes sans avoir à recourir aux notions de 'faces', 'arêtes', 'sommets'. Ainsi, la comparaison avec des objets usuels permet de caractériser très facilement tous les objets de la collection (mon solide ressemble à un dé à jouer/ une boîte à chaussure/ une boîte de conserve ou mon solide ne ressemble ni à un dé à jouer, ni à une boîte de chaussure, ni à une boîte de conserve). Comme tous les polyèdres sont des prismes droits, les élèves peuvent également utiliser la ressemblance avec des figures planes (mon solide ressemble à un carré / un rectangle). On peut aussi recourir à des descriptions 'fonctionnelles' pour caractériser certains solides de la collection ('mon solide peut rouler' pour le cylindre) ou donner des propriétés géométriques ('mon solide a des angles obtus' pour le prisme droit à base hexagonale). La dénomination (pour les trois solides étudiés au primaire et donc par élimination, pour le quatrième également) correspond certainement à la manière la plus efficace de caractériser chaque solide de la collection mais les élèves n'ont pas le droit de recourir à cette technique.

Par ailleurs, les stratégies attendues par l'enseignant ne sont pas, du moins avec le milieu matériel proposé, des stratégies gagnantes. Le dénombrement des faces, arêtes, sommets n'est ni nécessaire, ni suffisant pour caractériser chacun des solides de la collection. En effet, deux des informations s'avèrent redondantes par rapport à la troisième : si mon solide a six faces, alors il s'agit forcément d'un parallélépipède rectangle et je sais donc qu'il aura douze arêtes et huit sommets ; si mon solide a huit faces, ce ne peut être que le prisme droit à base hexagonale et il a donc dix-huit arêtes et douze sommets. Enfin, ce système de descripteurs n'est pas non plus suffisant puisqu'il existe deux parallélépipèdes rectangles (le cube et le parallélépipède rectangle non cubique) qui ont tous deux six faces, douze arêtes et huit sommets. Compléter ces stratégies par des informations sur la nature des faces s'avère une bonne stratégie pour les trois polyèdres mais pas pour le cylindre puisque les notions de faces/ arêtes/ sommets sont délicates à définir pour ce solide.

Par conséquent, les stratégies ne se référant pas aux notions de faces/ arêtes/ sommets semblent plus pertinentes alors que ces concepts constituaient pourtant l'objectif de l'activité. Ceci nous amène à douter du pronostic proposé dans la préparation de séance : 'les élèves devraient utiliser certains termes (ou tout au moins certaines notions) parmi ceux visés.' L'échec de cette étape est d'ailleurs

envisagé par l'enseignant, puisqu'il annonce qu'il présentera aux élèves les termes qu'ils n'ont pas utilisés (« *Le professeur présentera alors le vocabulaire adéquat et l'expliquera aux élèves.* »). Il ne s'agit donc plus d'une institutionnalisation, mais d'un simple apport de lexique, dont de plus l'enseignant ne peut pas justifier l'intérêt à partir de cette activité. Il sera alors contraint de l'imposer comme on le pressent dès la lecture de la préparation : « *Les élèves **doivent** reprendre leur description en utilisant les termes 'faces', 'arêtes' et 'sommets'.* ». La classe change alors de jeu : l'objectif n'est plus de décrire un solide pour le distinguer dans la collection (ce qui ne nécessite pas forcément l'utilisation des mots 'face', 'arête', 'sommet') mais d'utiliser les trois termes visés dans la description d'un solide. Le choix du milieu ne permettant pas de justifier la pertinence de cette pratique, l'enseignant est contraint de l'imposer.

4. Le déroulement de la séance

Nous allons à présent regarder si les obstacles anticipés par notre analyse didactique apparaissent effectivement dans la séance que nous avons observée :

4.1 La description d'un solide

Notre analyse a priori nous a montré que la description attendue représentait une tâche délicate qui risquait de déconcerter les élèves. Durant cette séance, l'enseignant a effectivement été obligé de réexpliquer plusieurs fois la consigne à la classe entière ou à certains élèves en particulier. Plus d'un quart d'heure après le début de l'activité, une élève s'exclame encore '*Vous m'avez pas expliqué*' ! Les élèves peinent à se mettre au travail et le *temps didactique* (Mercier, 1999) n'avance quasiment pas.

Déconcerté par ces difficultés inattendues (du moins pour lui), l'enseignant a du mal à éclaircir la consigne et il se contente de répéter à plusieurs reprises les mêmes périphrases pour définir le verbe 'décrire'.

P : on essaye de marquer sur la feuille l'objet **ce que c'est comment il est fait** d'accord [...]

P : t'essaye de dire **ce que c'est et dire comment il est fait** pour après le faire deviner aux autres.

Comme nous l'avons anticipé, les élèves ont bien du mal à comprendre les spécificités de la description attendue. Quelques questions surviennent concernant les règles *constitutives* du jeu (en ce qui concerne notamment la donnée du nom du solide, sa représentation graphique, son numéro), et sur les règles *stratégiques* (utilité de donner des informations sur la couleur) :

E : On le **dessine** ? [...]

E : On peut écrire la **couleur** ? [...]

E : Faut pas savoir le **numéro** du truc ? [...]

On notera à ce sujet une réponse plutôt ambiguë de l'enseignant, qui n'a certainement pas réalisé la difficulté de la tâche demandée :

E : Monsieur il fallait les faire tous.

P : Non tu choisis un objet et les autres tu laisses tomber les autres hein.

Pourtant pour élaborer une stratégie gagnante, il convient au contraire de considérer l'ensemble de la collection afin de trouver les propriétés qui caractérisent l'élément choisi. C'est certainement ce point-là qui pose le plus de difficultés aux élèves et l'enseignant, en passant dans les rangs, ne cesse de leur reprocher l'insuffisance de leur description.

P : faut essayer de le **décrire au maximum** aussi bien que possible voilà [...]

P : faut être précis faut essayer d'être **très précis** [...]

P : vous êtes sûrs que **ça va suffire** pour bien faire deviner l'objet imaginez un peu que vous connaissez pas l'objet et vous lisez ça est ce que vous allez bien voir dans votre tête que c'est celui-là celui-là ou celui-là vous êtes sûrs ou peut-être c'est **pas encore assez précis** [...]

P : Je sais pas s'ils vont forcément trouver facilement / si tu regardes bien ça me semble **un petit peu petit** comme description [...]

P : est ce que tu crois que si tu marques ça ils vont trouver exactement ce que c'est c'est déjà pas mal mais peut-être que **tu pourrais encore ajouter des choses** peut-être [...]

Pourtant il ne s'agit pas tant de rajouter des informations dans la description que de comprendre quelles sont celles qui sont indispensables.

Pour que la classe réalise les enjeux de l'activité, l'enseignant pourrait construire une première caractérisation en classe entière ou bien effectuer un tour de jeu avec la description erronée d'un élève, afin que tous perçoivent les lacunes ou les redondances de la caractérisation proposée. Toutefois, comme nous l'avions annoncé dans l'analyse a priori, la pauvreté du milieu matériel rendrait ces initiatives mal venues, car il resterait ensuite très peu de solides à décrire.

Finalement, l'enseignant en est réduit à effectuer un véritable *étayage* (au sens de Bruner, 1978) auprès d'une des élèves.

P : Ben là déjà tiens tu pourrais peut être compter les rectangles.

E : Mais comment on fait.

P : Mais je sais pas il y a combien de rectangles tu dis qu'y en a déjà un ici et ici y en a combien de rectangles.

E : Trois.

P : Regarde.

E : Ah quatre.

P : Et ben marque le.

E : Ah.

P : Tu sais y a quatre rectangles et ça c'est quoi ça.

E : Un carré.

P : Combien y en a.

E : Deux.

P : Ben voilà marque moi déjà ça [...]

P : Ben tu peux marquer / marque moi juste quatre rectangles c'est tout et puis tu liras au tableau l'objet qu'on a choisi avec Baylé il a quatre rectangles et deux carrés.

L'aide apportée par l'enseignant a donc foncièrement changé la nature du travail attendu chez l'élève, sans que cela ait été explicitement signalé : au lieu d'avoir à décrire un solide, il s'agit à présent simplement de dénombrer (avec l'aide de l'enseignant) le nombre de rectangles et de carrés. On assiste donc à un véritable *effet Topaze* (Brousseau, 1998).

Ainsi, comme nous l'avions prévu, la description des solides pose de réelles difficultés aux élèves mais à cause de la pauvreté de la collection, l'enseignant ne peut illustrer sur un des solides la tâche attendue. La taille de la collection s'avère donc bien être une variable didactique de la situation.

4.2 Les arêtes du cylindre

Nous avons signalé que les notions de face/ arête/ sommet n'étaient pas clairement définies sur le cylindre, ce qui risquait de perturber l'activité de la classe. La tâche de dénombrement des « arêtes

du cylindre » soulèvera effectivement une question :

P : Mohamed / y a une question.

E (en parlant du cylindre) : Il a zéro arête, monsieur?

P : Oui, zéro arête. [...] // Une arête / c'est quoi // Mohamed / c'est un segment qui relie deux sommets mais en plus deux sommets comme ça / tu vois / pas en diagonale // Là / il y en a pas / parce qu'il n'y a rien qui...

E : Ah, mais j'en ai compté deux.

P : Eh ben / non // On prend le troisième dessin // C'est le numéro...

L'enseignant évacuera très rapidement la question. Il n'a certainement pas réalisé le problème que posait la définition d'une arête pour un cylindre et ne voit donc pas l'intérêt de s'appesantir sur ce point. Ceci conduit donc l'enseignant à exposer à ses élèves un savoir inexact sur le plan mathématique, certainement sans même en avoir conscience.

Ce sera pourtant la seule remarque des élèves concernant ce sujet. On peut s'étonner qu'il n'y ait pas eu davantage de réactions. Cela signifie-t-il pour autant que tous les élèves avaient spontanément choisi le prolongement de la notion d'arête choisi par l'enseignant ? Il s'agit plus probablement d'une manifestation de la force du *contrat didactique* (Schubauer-Leoni, 1988) qui conduit les élèves à accepter sans les discuter les affirmations de l'enseignant.

4.3 Le milieu compromet la pertinence de la stratégie attendue

Nous avons montré lors de l'analyse a priori que plusieurs stratégies gagnantes existaient pour cette activité. En pratique, nous n'avons pas observé de stratégies-élèves relevant de la comparaison avec des objets usuels. Il est possible que le contrat didactique ait orienté les élèves vers des éléments internes à la discipline et les ait dissuadés d'utiliser des connaissances ou des pratiques issues de la vie quotidienne. Notons également que nous n'entendrons durant cette séance que deux descriptions d'élèves, dont une résulte d'un fort étayage de l'enseignant : peut-être d'autres productions d'élèves étaient-elles plus exotiques ? On remarque par contre des comparaisons avec des figures géométriques planes, ou plus exactement des assimilations entre le cube et le carré, le pavé droit et le rectangle. Plusieurs événements de ce type ont été relevés; nous n'en citerons qu'un exemple :

P : donc je donne à chaque table comme ça un objet comme ça.

E : Et un carré (en parlant d'un cube).

Par ailleurs nous avons signalé que, compte tenu du choix du milieu, les descripteurs visés (face/arête/sommet) ne correspondaient pas à la stratégie la plus pertinente. La première description présentée en classe entière (*'Mon objet a quatre rectangles et deux carrés'*) n'utilise effectivement aucun des trois termes visés et ne fait allusion qu'à la notion de faces. Pourtant il s'agit bien là d'une stratégie gagnante, comme l'enseignant le reconnaît lui-même :

P : vous voyez en très peu de mots elle a réussi à décrire cet objet là parce que là on est on s'est pas trompé.

Après cette remarque, il sera difficile de faire sentir aux élèves l'intérêt des notions de face/ arête/ sommet.

4.4 L'intérêt des notions faces/ arêtes/ sommets est peu perceptible

Nous venons de voir que les élèves n'avaient pas spontanément utilisé les termes faces/ arêtes/ sommets et que dans la première description proposée, seul le concept de face était utilisée. L'activité n'a donc pas permis de motiver le recours aux trois concepts visés, ce qui était pourtant

son objectif premier. Finalement, l'enseignant sera obligé de souffler aux élèves ce besoin qu'aucun n'a exprimé, puis introduira artificiellement dans le milieu le lexique visé en affirmant qu'il s'agit là de notions nécessaires pour la description de solides :

P : qu'est-ce qu'il vous manque comme vocabulaire pour trouver un / pour mieux décrire est-ce que par exemple si je prends cet objet là ou celui-là ou celui-là un des trois toutes les façons qu'est-ce que vous avez besoin de savoir comme mot pour mieux décrire l'objet par exemple ça comment ça s'appelle ça.

Il ne s'agira donc plus d'une phase d'institutionnalisation où l'enseignant apporte des notations ou des dénominations pour des notions découvertes et utilisées par les élèves. Il s'agit d'un apport de lexique dans la classe, sans lien direct avec l'activité des élèves, ce qui risque de fragiliser les apprentissages. L'enseignant conclut la présentation des termes face/arête/sommet en affirmant que les élèves peuvent à *présent* décrire les solides, ce qui peut surprendre puisque la description précédemment proposée avait été reconnue comme une stratégie gagnante :

P : donc maintenant on peut peut-être décrire nos objets parce que on a compris on a appris trois mots.

P : donc finalement grâce à ces quelques petits mots elle a réussi Rosa à nous faire deviner maintenant essayez un peu de le faire vous d'accord **mais encore mieux qu'elle avec plus de mots.**

Difficile de comprendre pourquoi le fait d'utiliser plus de mots pourrait améliorer la production des élèves surtout en mathématiques où la concision est généralement de rigueur.

Comme rien ne peut justifier la supériorité de la technique de description attendue (dénombrement des faces/ arêtes/ sommets) sur la description précédente, l'enseignant sera obligé d'imposer cette nouvelle contrainte, sans que les élèves en aient senti l'intérêt. L'enseignant change ainsi les règles du jeu. L'enjeu reste le même (caractériser un solide grâce à une description), mais une contrainte supplémentaire apparaît : il faut utiliser les termes 'face', 'arête', 'sommet'.

P : je pense que vous pouvez maintenant bien décrire l'objet que vous avez choisi **en me disant rien que le nombre par exemple** d'accord pour tout le monde bon on refait l'exercice mais là grâce aux mots que je marque.

Au passage, il orientera les élèves vers une stratégie bien spécifique : le dénombrement des faces, arêtes, sommets, sans pouvoir réellement justifier cette pratique puisque nous avons vu que cette stratégie n'était même pas une stratégie gagnante pour le milieu choisi. Ces trois descripteurs ne sont ni nécessaires, ni suffisants (ni même d'ailleurs définis de façon univoque) pour cette collection. Certes les élèves, habitués à ne pas discuter les demandes de l'enseignant, acceptent cette nouvelle contrainte mais cela interroge sur l'intérêt de l'activité proposée en amont.

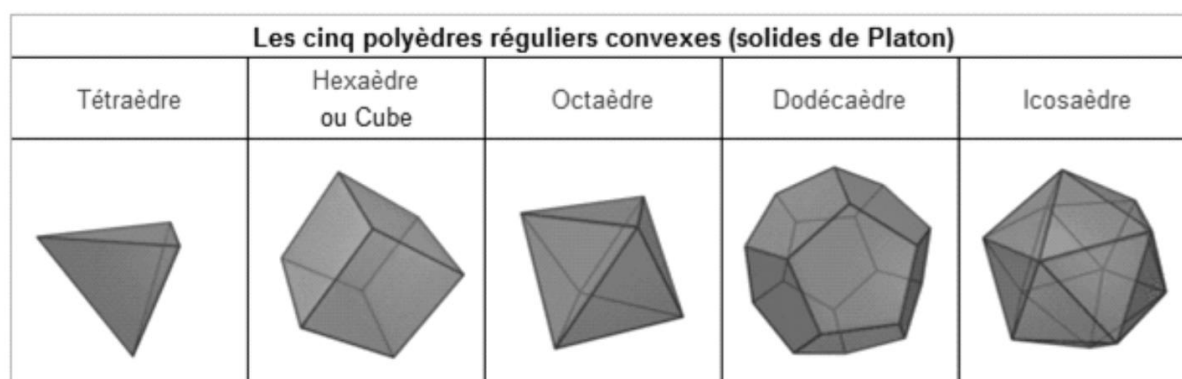
5. Éléments de discussion

5.1 Résultats de cette expérimentation

Nous venons de voir comment l'analyse a priori nous permettait de prévoir de manière plus efficace que les autres outils habituellement utilisés par les enseignants, les obstacles que la classe était susceptible de rencontrer au cours d'une séance donnée, ce qui entérine l'hypothèse que nous cherchions à éprouver dans cet article. Nos observations ont montré que les faiblesses du milieu pointées par notre analyse didactique perturbaient le déroulement de l'activité et empêchaient la classe d'atteindre l'objectif de cette séance : illustrer l'intérêt des notions de faces/ arêtes/ sommets.

Pourtant des modifications minimales du milieu matériel, mises en exergue lors de l'analyse a priori,

auraient permis d'améliorer grandement les chances de succès de l'entreprise. Il aurait fallu pour cela s'assurer que pour la collection considérée, une description des solides mettant en jeu les notions de faces/ arêtes/ sommets représentait bien la stratégie la plus pertinente. C'est pourquoi, il convient de ne considérer que des solides pour lesquels ces notions sont clairement définies, autrement dit uniquement des polyèdres (pas de cylindre!). Il faudrait également avoir une collection plus fournie : ceci aurait permis d'effectuer un tour de jeu soit en classe entière soit à partir de la description (même erronée) d'un élève, afin de permettre à la classe de comprendre les enjeux de l'activité. Cela aurait de plus dissuadé les élèves de répondre aléatoirement après la description du solide recherché. Par ailleurs, adjoindre à la collection des solides inhabituels aurait permis de discréditer la comparaison avec les objets usuels. Il aurait été également souhaitable d'ajouter des solides non étudiés précédemment afin que les élèves ne connaissent pas leurs noms, et qui ne soient pas des prismes afin que les élèves ne soient pas tentés de les assimiler à leurs bases. On pourrait notamment constituer une collection à partir des cinq solides de Platon :



Mais tous ces solides sont des polyèdres réguliers (toutes leurs faces sont identiques). Il serait donc bon de varier le type de descriptions en ajoutant à la collection d'autres solides, une pyramide à base hexagonale par exemple, voire quelques uns des treize solides d'Archimède (voir annexe 6) ou des polyèdres plus complexes encore, ce qui montrerait aux élèves la diversité de cette classe d'objets.

Remarquons toutefois qu'aucune collection ne pourra rendre les trois descripteurs (nombre de faces, nombre d'arêtes, nombre de sommets) indispensables, puisqu'ils sont liés par la formule d'Euler. Cependant une collection bien choisie peut amener les élèves à sentir l'intérêt d'au moins deux de ces notions, en présentant, par exemple, plusieurs solides ayant le même nombre de faces mais pas le même nombre d'arêtes. On pourrait également introduire volontairement des solides pour lesquels ces descripteurs ne sont pas suffisants (par exemple en considérant un cube et un pavé droit non cubique) afin de montrer que cette stratégie n'est pas toujours suffisante et que des considérations sur la nature des faces ou la taille des arêtes peuvent s'avérer utiles.

Enfin l'enseignant pourrait, une fois que les élèves ont senti l'intérêt des notions de faces/ arêtes/ sommets, leur présenter des solides qui ne soient pas des polyèdres, comme le cylindre, le cône ou la sphère, afin de leur montrer, sans entrer dans les détails, que la situation se complique parfois. Ceci conduirait à une institutionnalisation plus correcte où l'on préciserait que l'on ne définit les faces/ arêtes/ sommets que pour des solides formés de polygones.

On pourrait également imaginer d'autres ingénieries didactiques portant sur ce thème. Ainsi, T. Dias nous présente une situation dont il montre dans un premier temps la consistance épistémologique, puis qu'il expérimente dans une unité pédagogique d'intégration (UPI) d'un collège de la banlieue

lyonnaise. Il s'agit dans un premier temps de réactiver certaines notions utilisées lors de l'étude des solides en demandant aux élèves de construire le plus possible de solides fermés à partir de « polydrons » (figures planes en plastique que l'on peut facilement fixer ensemble). Les élèves doivent alors classer les solides obtenus (qui, par construction sont tous des polyèdres) et être capables d'argumenter leurs choix, ce qui doit notamment faire émerger les notions de 'faces', 'arêtes', 'sommets'. Cette activité est finalement assez proche de la nôtre puisqu'il s'agit de caractériser une famille de solides au sein d'un échantillon. Cette fois encore, il faudra s'assurer que la collection qui est ici conçue par les élèves, est suffisamment riche et variée pour que les diverses notions visées s'avèrent effectivement nécessaires.

Dans un deuxième temps, les élèves doivent essayer de dénombrer tous les polyèdres réguliers existants, à partir de la définition de cette famille de solides. Les observations de séances ont montré une activité mathématique chez les élèves particulièrement intéressante puisqu'ils ont été amenés à éprouver, voire à formuler les deux axiomes suivants :

A1. Un sommet appartient à trois faces au minimum.

A2. La somme des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit.

Cette activité a également permis à certains groupes de réaliser l'ambiguïté du mot 'côté' et donc de sentir l'intérêt du mot 'arête'. Par ailleurs les élèves ont été amenés à effectuer de fréquents aller-retours entre l'objet matériel et l'objet géométrique et donc à percevoir la dialectique entre le réel et le pensé.

5.2 Les limites de l'expérimentation

Pour une première étude exploratoire, nous n'avons analysé ici qu'une seule séance. Il serait à présent intéressant de regarder si des phénomènes semblables se produisent ailleurs. Nous avons déjà observé cette même activité dans une autre classe de sixième accueillant des élèves d'un niveau scolaire en moyenne nettement plus élevé et les phénomènes didactiques annoncés par l'analyse a priori nous ont paru de moins grande ampleur. Cela signifie-t-il que les élèves en difficulté sont plus sensibles que les autres aux obstacles épistémiques ou épistémologiques ? Cette question mériterait une étude approfondie sur un éventail plus large d'observations. On pourrait également effectuer un travail similaire (comparaison des éclairages apportés par les outils traditionnels - instructions officielles et manuels scolaires - et par l'analyse a priori) sur une autre préparation de séance afin de voir si nous obtenons des résultats similaires quant à l'intérêt des théories didactiques.

De plus, lors de l'analyse a priori, puis lors de l'observation de la séance, nous avons remarqué des phénomènes qui nous semblent de nature à fragiliser l'apprentissage et la mémorisation des notions de 'face', 'arête' et 'sommet'. Il serait intéressant de regarder si tel a effectivement été le cas. De quoi se souviennent les élèves une semaine après cette activité ? Et un mois après ?

Enfin, nous venons de suggérer, en nous appuyant sur notre analyse a priori, des modifications du milieu matériel. Il reste à voir si ces adaptations produisent effectivement une amélioration d'une part dans l'activité mathématique des élèves durant la séance, d'autre part dans la mémorisation des savoirs. Il faudrait pour cela concevoir une ingénierie didactique et l'éprouver ensuite.

L'étude amorcée dans cet article mérite donc d'être poursuivie afin de mieux comprendre l'intérêt de l'analyse a priori sur l'activité et les apprentissages des élèves.

5.3 Confrontation avec des recherches antérieures

D'autres études ont analysé l'apport que pouvaient constituer pour l'enseignant l'utilisation de l'analyse a priori. Ainsi, Margolinas & Rivière (2005) soulignent que celle-ci permet à l'enseignant d'anticiper le déroulement de sa séance sans être accaparé par la gestion de sa classe. Il pourra alors sereinement réfléchir aux difficultés qui attendent ses élèves, aux stratégies qui risquent d'apparaître dans la classe et à la manière de rendre son enseignement le plus efficace possible. L'analyse a priori pousse l'enseignant à questionner les activités proposées par les manuels ou celles qu'il a lui-même conçues. Elle l'amène à s'interroger sur les causes non plus pédagogiques mais épistémiques (découlant du savoir lui-même) et épistémologiques (provenant du discours sur le savoir) des difficultés d'apprentissage de ses élèves. Alors que les préparations habituelles des enseignants se restreignent à l'exposition, pour chaque question d'une stratégie (celle qui, du fait de son expérience d'enseignant ou de son bagage mathématique semble la plus naturelle au professeur, ce qui n'est pas forcément le cas pour ses élèves), l'analyse a priori l'amènera à étudier tout le champ des possibles concernant le déroulement de son cours.

Malheureusement peu d'enseignants ont eu l'occasion de rencontrer durant leur formation de telles analyses, ce qui conduit Margolinas & Rivière à postuler que ce type de connaissances ne peut s'acquérir spontanément avec la seule expérience d'enseignement. Ces connaissances doivent donc bien faire l'objet d'une formation spécifique :

« Il y a donc un enjeu de formation important à inclure les projets de séance ou de séquence dans une construction de thème épistémologiquement contrôlée. Ce n'est pas facile, les stagiaires, pourtant armés mathématiquement par leurs études universitaires, n'ont pas la pratique du recul épistémologique et peinent à interroger les constructions toutes faites qui leur viennent des manuels, par exemple. » (Margolinas-Rivière, 2005)

Ainsi les connaissances mathématiques issues de leur cursus universitaire ne suffisent pas aux enseignants pour dispenser des cours de qualité. C'est aussi ce que nous avons constaté dans nos observations : les connaissances acquises lors de ses propres études n'ont pas empêché l'enseignant de réaliser une erreur sur le plan mathématique en parlant des arêtes du cylindre, sans définir cette notion auparavant. Cette maladresse peut provenir d'un oubli des leçons apprises plusieurs années auparavant. Mais il est plus probable qu'elle découle de la différence dans la nature des savoirs. Ces notions ne font pas partie des programmes d'enseignement de la filière mathématique de l'université, ni même des classes scientifiques du lycée. Au cours de son cursus scolaire, l'enseignant n'a donc travaillé ce thème qu'à l'école ou au collège. Or à ces niveaux, on évite généralement un formalisme excessif. On se concentre sur la reconnaissance ou le dénombrement et on ne précise pas que les faces, arête, sommet ne sont définis que pour les polyèdres. Comme ce type d'informations ne figure pas non plus dans les instructions officielles ou les manuels, l'enseignant n'a aucune raison de les avoir rencontrées : ses cours comporteront donc les mêmes lacunes que l'enseignement qu'il a lui-même reçu, poursuivant ainsi un cercle vicieux qui n'a pas de raison de s'arrêter.

On notera que ni les instructions officielles ni les manuels scolaires ne parlent explicitement de faces ou d'arêtes pour des solides qui ne seraient pas des polyèdres (exception faite, toutefois d'une remarque dans les programmes du cycle d'approfondissement : « cube, pavé droit, cylindre, prismes droits, pyramide [...] vocabulaire spécifique relatif à ces solides : sommet, arête, face » Hors série n°3 du 19 juin 2008). Mais l'injonction, d'une part d'étudier les propriétés des faces, arêtes, sommets des solides, d'autre part de travailler sur les solides usuels parmi lesquels figurent le cylindre, conduit en l'absence de garde-fous à une assimilation compréhensible.

En fait, l'enseignant dispose d'un côté des savoirs *à enseigner* (donnés par les instructions officielles et les manuels scolaires), d'autre part des savoirs savants sous-jacents (appris lors de ses études), mais aucun de ces types de savoirs ne correspond parfaitement aux savoirs *pour enseigner* indispensables pour encadrer les apprentissages de ses élèves.

Bloch (1997) observe également que les connaissances universitaires de l'enseignant ne sont pas toujours suffisantes pour construire une leçon. Or :

« ... si l'enseignant ne dispose pas des connaissances nécessaires pour aller chercher, là où il est, c'est-à-dire pas toujours tout près (ni tout prêt) le savoir mathématique utile à la situation, il nous paraît illusoire d'espérer qu'il puisse installer dans sa classe une situation pertinente pour le savoir visé. » (Bloch, *ibid*).

L'enseignant se sert alors de son expérience pour effectuer une transposition personnelle des savoirs savants visés, transposition parfois maladroite et même source d'erreurs pour les élèves. Ceci conduit Bloch à formuler l'hypothèse suivante :

« Lorsque la théorie, c'est-à-dire le savoir mathématique, n'apparaît plus explicitement dans les programmes, les professeurs, à cause des difficultés mentionnées ci-dessus, sont impuissants à le restaurer seuls dans leur classe. » (Bloch, *ibid*).

Il manque une transposition intermédiaire des savoirs savants en savoirs *pour enseigner* qui permettrait aux professeurs de construire des activités pertinentes pour le savoir *à enseigner*. Ces réflexions rejoignent celles de Liping Ma (1999). En comparant l'enseignement de la soustraction en Chine et aux Etats Unis, celle-ci explique qu'il existe plusieurs manières d'introduire cette notion. Elle montre comment les choix des enseignants concernant la transposition de ce savoir créent parfois des obstacles pour les apprentissages ultérieurs des élèves. Elle explique que pour effectuer les bonnes transpositions, l'enseignant doit disposer de connaissances spécifiques, (notamment sur la suite du curriculum des élèves) : The Pedagogical Content Knowledge.

Qui doit effectuer cette transposition intermédiaire? S'il est bon de donner aux enseignants la formation didactique qui leur permettra de juger par eux-mêmes de la pertinence de leurs choix dans leur enseignement, on ne peut pas alourdir leur charge de travail en leur confiant l'entière prise en charge de cette entreprise. Il faudrait que les didacticiens et les concepteurs des programmes s'interrogent sur les savoirs que l'on souhaite voir vivre dans la classe et à partir de là, cherchent comment les y introduire et les contrôler, afin de déterminer les connaissances dont doit disposer l'enseignant :

« C'est dire que l'institution doit assumer une part de la charge de la transposition didactique, en termes de prise de position par rapport au savoir, et ne pas la laisser toute entière aux enseignants. L'institution réaliserait ainsi un premier niveau de transposition, sur lequel les enseignants pourraient s'appuyer. » (Bloch, 1997)

Tout ceci nous montre donc que pour renforcer l'efficacité des enseignements, il faudrait fournir aux professeurs les outils nécessaires à la conception de ses activités, c'est-à-dire d'une part les outils didactiques comme l'analyse a priori et d'autre part des savoirs mathématiques, intermédiaires entre les savoirs *à enseigner* et les savoirs savants : les savoirs *pour enseigner*. On peut noter que des dispositifs comme ceux que présente le projet AMPERES vont dans ce sens.

Conclusion

Nous avons cherché à montrer dans cet article l'aide que pouvait apporter la didactique aux professeurs d'une part en leur permettant de diagnostiquer les lacunes de leur préparation de séances

d'autre part en les aidant à y remédier, notamment grâce à l'analyse a priori. Nous avons également observé que *les savoirs pour enseigner* ne correspondaient ni aux *savoirs savants* ni aux *savoirs à enseigner* présent dans les programmes officiels et qu'une transposition s'avérait nécessaire. Des outils existent donc pour améliorer la qualité des enseignements mais ils ne pourront être réellement efficaces que si l'on donne aux enseignants les moyens de les utiliser. Par conséquent, l'institution et les didacticiens doivent accompagner l'appropriation de ces outils par les praticiens, soit en formation initiale soit en formation continue. L'affaire n'est pas si simple car enseignants et formateurs regardent encore souvent avec méfiance les théories didactiques. Comme le disait Brousseau (1989) :

« Cette réticence provient d'un ensemble de circonstances défavorables et scandaleuses: -la didactique est difficile à expliquer, surtout aux professeurs ! -elle est souvent d'autant plus difficile à leur expliquer qu'ils en attendent davantage d'effets ; de ce point de vue, les conditions de l'enseignement dans le premier cycle du secondaire sont vécues comme si mauvaises qu'elles justifient les attentes les plus impérieuses »

Il est donc urgent d'éveiller l'intérêt des praticiens pour les théories didactiques, sans quoi les professeurs continueront de se priver de moyens qui pourraient s'avérer précieux pour leurs pratiques professionnelles et qui ne sont pour l'instant utilisés que par les chercheurs. C'est pourquoi nous espérons par cette analyse avoir contribué à montrer l'efficacité que pourraient représenter pour les enseignants ces outils didactiques, afin de leur donner envie de s'en emparer à leur tour.

Bibliographie

- AMPERES, Apprentissage des Mathématiques par des Parcours d'Étude et de Recherches dans l'Enseignement Secondaire. <http://educmath.inrp.fr>
- ARTIGUE, M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9(3), 281-308.
- BERTE, A., CHAGNEAU, J., DESNAVRES, C., LAFOURCADE, J. & SAGEAUX, C. (2004). Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique. Un exemple: enseigner le cosinus en 4eme. *Petit x*. 65, 9-35 : IREM de Grenoble.
- BLOCH, I. (1997) Les connaissances mathématiques de l'enseignant pour l'enseignement. *Petit x*. 45, 5-24 : IREM de Grenoble .
- BROUSSEAU, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*. 21, 47-68 : IREM de Grenoble.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BRUNER, J. (1978). The role of dialogue in language acquisition. In A. Sinclair, R., J. Jarvella, and W. J. M. Levelt (eds.). *The Child's Concept of Language*. New York: Springer-Verlag.
- CHEVALLARD, Y. (1992). *Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.
- DIAS, T. (2009). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. *Cours pour l' école d'été de recherche en didactique des mathématiques*.
- EUCLIDE (réédition 2002). *Eléments*. Presses Universitaires Françaises.
- HACHETTE J.-N. (1822). *Traité de géométrie descriptive: comprenant les applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie*. Corby.

- LIPING, M. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.
- MARGOLINAS, C. (1994) Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. *Séminaire Dida Tech, n° 158, Université Joseph Fourier, Grenoble*.
- MARGOLINAS, C. & RIVIÈRE, O. (2005). La préparation de séance : un élément du travail du professeur. *Petit x 69, 32-57*. IREM de Grenoble.
- MATHERON, Y. & NOIRFALISE, R. (2006). Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques. Quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique. *Petit x 70, 30-47* : IREM de Grenoble.
- MERCIER, A. & TONNELLE, J. (1992). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Deuxième partie. *Petit x 29, 15-56* : IREM de Grenoble.
- MERCIER, A. & TONNELLE, J. (1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Troisième partie. *Petit x 33, 5-35* : IREM de Grenoble.
- MERCIER, A. & ASSUDE, T. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G.Sensevy & A.Mercier. *Agir ensemble ; L'action didactique conjointe du professeur et de l'élève ; Paideia*. Presses Universitaires de Rennes, 118-145.
- MERCIER, A. (1999). *Sur l'espace temps didactique*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, Université de Provence, Aix-Marseille I.
- MERCIER D.-J. (2008). *Cours de géométrie*. Editions Publibook.
- MILLON-FAURÉ, K. (2011). *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Aix-Marseille I.
- MONTOR, A. (1836). *Encyclopédie des gens du monde: répertoire universel des sciences, des lettres et des arts; avec des notices sur les principales familles historiques et sur les personnages célèbres, morts et vivants (Volume 7)*. Librairie de Treuttel et Würtz.
- PUISSANT, L. (1836). *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées*. Librairie Denain et Delamare.
- ROEGIERS, X. (2000). *Les mathématiques à l'école primaire (Tome 2)*. De Boeck.
- SCHUBAUER-LEONI, M. (1988). Le contrat didactique : une construction théorique et une connaissance pratique. *Interactions Didactiques, 9, 67-81*.
- SENSEVY, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G.Sensevy & A.Mercier. *Agir ensemble ; L'action didactique conjointe du professeur et de l'élève ; Paideia*. Presses Universitaires de Rennes, 13-45.
- STURM, C.-F. (2010). *Cours D'Analyse de L'Ecole Polytechnique (Volume 2)*. BiblioBazaar.
- VALLÉE, L.-L. (1819). *Traité de géométrie descriptive*. Paris, Ve Courcier.

ANNEXE 1 : Fiche de préparation

OBJECTIFS :

- motiver l'utilisation des mots faces, arêtes, sommets à partir de la description de solides.
- dénombrement des faces, arêtes, sommets sur un solide, mais également sur un dessin en perspective cavalière.

DEROULEMENT :

1) Présentation des solides et de l'activité

Le professeur distribue 4 solides (cube, pavé droit, prisme à base hexagonale et cylindre) à chaque binôme. Les solides peuvent être désignés par un numéro collé dessus.

2) Recherche en binôme : description d'un des solides

3) Mise en commun : travail sur une ou deux descriptions

Un élève lit sa description et la classe essaie de deviner le solide ciblé.

Les élèves devraient utiliser certains termes (ou tout au moins certaines notions), parmi ceux visés.

Le professeur présentera alors le vocabulaire adéquat et l'expliquera aux élèves.

4) Recherche en binôme : reformulation de la description en fonction du vocabulaire appris

Les élèves doivent reprendre leur description en utilisant les termes 'faces', 'arêtes' et 'sommets'.

5) Mise en commun : travail sur une ou deux descriptions

Un élève lit sa nouvelle description et la classe tente à nouveau de découvrir le solide concerné.

6) Recherche individuelle : fiche de synthèse

Les 4 solides sont représentés sur une feuille en perspective cavalière. Les élèves doivent dénombrer les faces, arêtes et sommets en s'aidant éventuellement des véritables solides.

7) Correction de la fiche

8) Recherche individuelle : fiche d'exercice

Une feuille contenant de nombreux solides en perspective cavalière est distribuée. Les élèves doivent dénombrer les faces, arêtes et sommets uniquement à partir des représentations.

9) Correction de l'exercice

ANNEXE 2 : Triangle 6^e (Hatier; 2005)

1 Boîtes mystérieuses

Deux amies, Estelle et Lucie, discutent en regardant ces cinq boîtes

(1) (2) (3) (4) (5)

La base de cette boîte est un triangle

a. – Lucie : « Celle que je préfère a 5 faces. »
Estelle : « Je sais quelle est celle que tu préfères. »
Trouver la boîte préférée de Lucie.

b. – Estelle : « Celle que je préfère a 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets. »
– Lucie : « Avec ces indications, je ne peux pas trouver. »
A-t-elle raison ? Si oui, quelle indication pourrait rajouter Estelle concernant les faces de la boîte qu'elle préfère ?

c. Parmi ces boîtes, quelles sont celles dont vous connaissez le nom mathématique ?

ANNEXE 3 : Les mathématiques à l'école primaire (Xavier Roegiers)

Décrire un solide

Pour amener les enfants à suffisamment de rigueur dans la description d'un solide, on peut leur proposer le jeu du portrait. L'enseignant propose aux enfants toute une série de solides différents et identifiables par des caractéristiques géométriques (par exemple les solides du 3.8.1).

Un enfant choisit un de ces solides dans sa tête. Les autres doivent découvrir le solide dont il s'agit à travers des questions, dont la réponse est OUI/NON et qui ne mentionnent le nom d'aucun solide.

Variante : celui qui a choisi le solide doit le décrire sans citer un seul nom de solide.

ANNEXE 4 : Guide de l'enseignant (Cap Maths CM1, Hatier)

Jeu du portrait :

Dans une enveloppe, se cache une étiquette avec le nom d'un solide. Comment savoir de quel solide il s'agit? Posez des questions à l'oral. Il ne faut pas utiliser le nom des solides, ni les lettres écrites dessus. A chaque question, le maître ou la maîtresse ne répondra que par oui ou par non. Vous devez trouver le solide en posant le moins de questions possibles

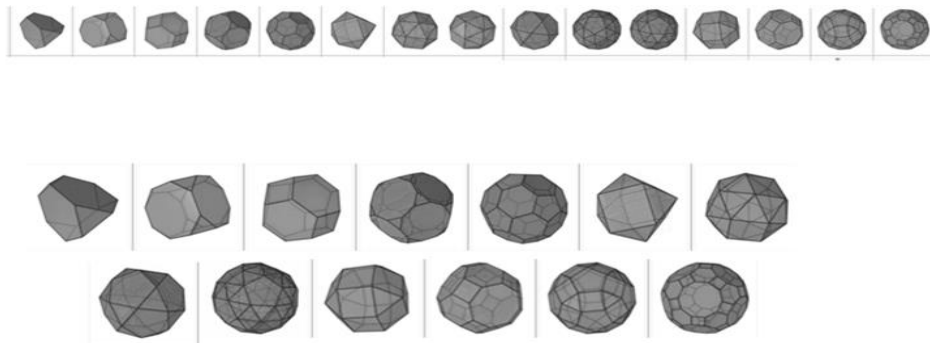
ANNEXE 5 : Guide de l'enseignant (Euro Maths CM1, Hatier)

Le professeur dispose les solides sur son bureau face aux élèves et désigne chacun d'eux par une lettre comme dans la découverte. Les élèves sont regroupés par 4 ou 5 et disposent du même jeu de solides que le professeur. Nous proposons trois phases de jeu.

■ Première phase

Le professeur fait le portrait d'un solide de son choix, il peut inscrire les propriétés au fur et à mesure au tableau. Les élèves doivent trouver de quel solide il s'agit. Au signal, ils écrivent la lettre correspondant au solide sur leur ardoise. La vérification se fait collectivement avec le solide.

Les propriétés choisies par le professeur peuvent concerner les faces (nombre, forme), les sommets (nombre, nombre de faces auquel le sommet appartient), le nombre d'arêtes. Les élèves disposant du référentiel de solides, la description peut ne pas être exhaustive.



ANNEXE 6 : Les 13 solides d'Archimède