



Sur l'UP-résilience des k-UCSs binaires

Mohamed Sami Cherif, Djamel Habet

► **To cite this version:**

Mohamed Sami Cherif, Djamel Habet. Sur l'UP-résilience des k-UCSs binaires. Actes des 15èmes Journées Francophones de Programmation par Contraintes (JFPC), pp. 177-180, Jun 2019, Albi, France. hal-02295161

HAL Id: hal-02295161

<https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02295161>

Submitted on 24 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'UP-résilience des k -UCSs binaires

Mohamed Sami Cherif*

Djamal Habet

Aix Marseille Université, LIS UMR 7020, 13397 Marseille, France

{mohamed-sami.cherif,djamal.habet}@univ-amu.fr

Résumé

Les solveurs basés sur la méthode séparation et évaluation (BnB) pour Max-SAT exploitent la max-résolution, la règle d'inférence pour Max-SAT, pour s'assurer que chaque sous-ensemble inconsistant (IS) détecté n'est compté qu'une seule fois. Cependant, les transformations par max-résolution peuvent affecter négativement leurs performances. Elles sont alors généralement apprises de manière sélective : quand elles respectent certains motifs. Dans ce papier, on s'intéresse à des motifs particuliers appelés k -UCSs binaires. On prouve que ces motifs vérifient une caractérisation récente des transformations par max-résolution appelée UP-résilience et on décrit comment ce résultat peut aider à étendre les motifs actuels. Enfin, ce travail s'inscrit d'une démarche globale de caractérisation de la pertinence des transformations par max-résolution.

Abstract

Branch and Bound (BnB) solvers for Max-SAT exploit max-resolution, the inference rule for Max-SAT, to ensure that every computed Inconsistent Subset (IS) is counted only once. However, learning max-resolution transformations can be detrimental to their performance so they are usually selectively learned if they respect certain patterns. In this paper, we focus on particular patterns called binary k -UCSs. We prove that these patterns verify a recent characterization of max-resolution transformations called UP-resilience and we show how this result can help extend the current patterns. Finally, this work is part of a global approach to characterize the relevance of transformations by max-resolution.

1 Introduction

Pour une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive, le problème Max-SAT consiste à trouver une affectation des variables qui maximise le

nombre de clauses satisfaites. Les méthodes complètes pour résoudre Max-SAT incluent des algorithmes de type séparation et évaluation (BnB) (e.g. AHMAX-SAT [2], MAXSATZ [7, 5]) qui calculent, à chaque nœud de l'arbre de recherche, la borne inférieure en comptant le nombre de sous-ensembles inconsistants (IS) disjoints de la formule avec la propagation unitaire simulée (SUP) [6]. Lorsqu'un IS est trouvé, il est soit supprimé temporairement dans le nœud courant ou transformé par max-résolution, la règle d'inférence pour Max-SAT [4], pour garantir qu'il ne sera compté qu'une seule fois. Cependant, l'apprentissage de ces transformations peut affecter négativement la qualité de l'estimation de la borne inférieure. Les solveurs de l'état de l'art apprennent alors les transformations de manière sélective sous la forme de motifs [7].

L'impact des transformations par max-résolution sur le mécanisme de la propagation unitaire a été étudié par la propriété de l'UP-résilience [3]. Elle met en relation l'influence de la max-résolution sur le mécanisme de la propagation unitaire, indispensable au calcul de la borne inférieure. De plus, Des nouveaux motifs appelés k -UCSs (k -Unit Clause Subsets) ont été introduits et étudiés de manière empirique dans [1]. L'intérêt majeur de ces motifs est la production de clauses unitaires après la transformation par max-résolution. Dans ce travail, nous apportons une étude théorique de certains k -UCS et, plus précisément, de leur relation avec l'UP-résilience.

Ce papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous donnons quelques notations et définitions. Dans la section 3, nous prouvons notre conjecture sur l'UP-résilience des k -UCSs binaires. Enfin, nous discutons les implications de ce résultat et évoquons des perspectives dans la section 4.

*Papier étudiant en master de recherche : Mohamed Sami Cherif est auteur principal.

2 Définitions & Notations

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et notions indispensables pour la suite.

Définition 1 (max-résolution). La règle d'inférence pour Max-SAT, appelée max-résolution, est définie comme suit :

$$\frac{c = \{x, y_1, \dots, y_s\}, c' = \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t\}}{cr = \{y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t\}, cc_1, \dots, cc_t, cc_{t+1}, \dots, cc_{t+s}}$$

avec les clauses de compensation :

$$\begin{aligned} cc_1 &= \{y_1, \dots, y_s, \bar{z}_1, \dots, z_t\} \\ cc_2 &= \{y_1, \dots, y_s, \bar{z}_2, \dots, z_t\} \\ &\dots \\ cc_t &= \{y_1, \dots, y_s, \bar{z}_t\} \\ cc_{t+1} &= \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t, \bar{y}_1, y_2, \dots, y_s\} \\ cc_{t+2} &= \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t, \bar{y}_2, \dots, y_s\} \\ &\dots \\ cc_{t+s} &= \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t, \bar{y}_s\} \end{aligned}$$

La transformation produit une formule équivalente dans le sens où elle préserve le nombre des clauses insatisfaites pour toute interprétation [4]. Contrairement à la règle d'inférence pour SAT, la max-résolution remplace les prémisses de la règle par ses conclusions.

Notation. Si ψ est un IS d'une formule Φ et $S = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ une séquence de variables dans ψ , on note $\Theta(\psi, S)$ l'ensemble des clauses obtenues après l'application des étapes de max-résolution relative à la séquence S . Plus formellement, $\Theta(\psi, S) = \theta(\theta(\dots(\theta(\psi, x_1), x_2), \dots), x_k)$ où $\theta(\psi, x)$ dénote l'application de l'étape de max-résolution définie ci-dessus sur la variable x .

Un IS peut être détecté par différentes séquences de propagations unitaires correspondant chacune à un graphe d'implications [8]. Donc, avant de rappeler la notion d'UP-résilience, on donne la définition des voisinages possibles d'un littéral figurant dans un IS.

Définition 2 (Voisinages possibles). Soit ϕ une formule et ψ un IS. Pour un littéral l dans ψ , on définit l'ensemble de ses voisinages possibles par $\text{pneigh}_\psi(l) = \{\text{neigh}_G(l) \mid G = (V, A) \text{ graphe d'implications de } \psi \text{ tel que } l \in V\}$ où $\text{neigh}_G(l)$ dénote les voisins de l dans G .

Définition 3 (UP-résilience). Soit ϕ une formule, ψ un IS et S une séquence de variables dans ψ . On dit que la transformation $\Theta(\psi, S)$ est UP-résiliente pour un littéral l dans ψ ssi $\forall N \in \text{pneigh}_\psi(l) : \square \in N$ ou l peut être propagé dans $\Theta(\psi, S)|_N$ avec $\Theta(\psi, S)|_N$ l'ensemble des clauses de $\Theta(\psi, S)$ où les littéraux dans N sont affectés à vrai. On dit que $\Theta(\psi, S)$ est UP-résiliente si elle est UP-résiliente pour tous les littéraux apparaissant dans ψ .

Définition 4 (k-UCS). Soit ϕ une formule et $k \geq 2$. On note k -UCS (k -Unit Clause Subset) tout ensemble de clauses $\psi \subseteq \phi$ tel qu'il existe un séquence d'étapes de max-résolution sur ψ qui produit une résolvant intermédiaire unitaire. En particulier, si $\forall c \in \psi$ on a $|c| = 2$ alors ψ est un k -UCS binaire, noté k^b -UCS.

Exemple 1. les motifs suivants qui sont appris dans les solveurs BnB de l'état de l'art, correspondent respectivement à un 2^b -UCS et un 3^b -UCS.

$$\frac{\{l_1, l_2\}, \{l_1, \bar{l}_2\}}{\{l_1\}} (P_1) \quad \frac{\{l_1, l_2\}, \{l_1, l_3\}, \{\bar{l}_2, \bar{l}_3\}}{\{l_1\}, \{l_1, l_2, l_3\}, \{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}} (P_2)$$

Certains k -UCSs sont facilement détectables en analysant le graphe d'implications de l'IS détecté [1]. En effet, les clauses qui sont entre le conflit et le premier point d'implication unique (FUIP) [8] produisent une clause résolvante unitaire si elles sont transformées par max-résolution. Dans la suite, on traite ce type de k^b -UCS.

3 UP-résilience des k-UCSs binaires

Dans cette section, on commence par prouver que les 2-UCSs et 3-UCSs sont UP-résilients pour tout ordre d'application de la max-résolution. Ensuite, on généralise ce résultat sur les k -UCSs binaires en introduisant un ordre qui assure leur UP-résilience.

Proposition 1. Les motifs 2^b -UCSs sont UP-résilients.

Preuve. Les 2^b -UCSs sont tous de la forme $\psi = \{\{l_1, l_2\}, \{l_1, \bar{l}_2\}\}$. Ainsi, il existe deux séquences de propagations possibles pour les 2^b -UCSs dont les graphes d'implications sont représentés dans Fig.1. Puisque tous les voisinages possibles de chaque littéral contiennent la clause vide, la transformation de ψ est UP-résiliente.

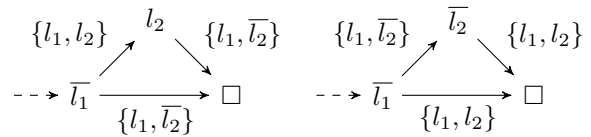


FIGURE 1 – Graphes d'implications représentant séquences de propagations possibles pour les 2^b -UCSs

Proposition 2. Les 3^b -UCSs sont UP-résilients.

Preuve. Les 3^b -UCSs sont tous de la forme $\psi = \{\{l_1, l_2\}, \{l_1, l_3\}, \{\bar{l}_2, \bar{l}_3\}\}$. Ainsi, il existe deux séquences de propagations possibles pour les 3^b -UCSs dont les graphes d'implications sont représentés dans

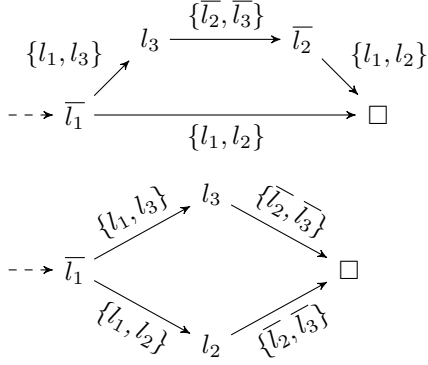


FIGURE 2 – Graphes d’implications représentant séquences de propagations possibles pour les 3^b -UCSs

Fig.2. Puisque tous les voisinages possibles de l_2 et \bar{l}_2 contiennent la clause vide, la transformation de ψ par max-résolution est UP-résiliente pour l_2 et \bar{l}_2 . De plus, la transformation de ψ a la forme suivante $\frac{\{l_1, l_2\}, \{l_1, l_3\}, \{\bar{l}_2, \bar{l}_3\}}{\{l_1\}, \{l_1, l_2, l_3\}, \{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}}$. Les littéraux \bar{l}_1 et l_3 admettent chacun un seul voisinage qui ne contient pas la clause vide, respectivement $\{l_2, l_3\}$ et $\{\bar{l}_1, \bar{l}_2\}$. Donc, les clauses $c = \{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}$ et $c' = \{l_1, l_2, l_3\}$ assurent la propagation des littéraux \bar{l}_1 et l_3 après la transformation par rapport à leurs voisinages respectifs.

Conjecture. $\forall k \geq 2$, les k^b -UCSs sont UP-résilients.

Afin de prouver cette conjecture, on va commencer par caractériser les graphes d’implications représentant les séquences de propagations possibles des k^b -UCSs. Ensuite, en utilisant cette caractérisation, on définit un ordre d’application de la max-résolution qui assure l’UP-résilience après la transformation.

Lemme 1. Soit $k \geq 2$ et ψ un k^b -UCS reconnu par le FUIP l dans un graphe d’implications G . Il existe exactement deux chemins disjoints de l à \square dans G .

Preuve. l est un point d’implication unique (UIP) donc, tous les chemins des sommets représentant les clauses unitaires à \square passent par l . La clause du conflit est binaire, donc $|\text{pred}(\square)| = 2$. Ainsi, il existe au moins deux chemins distincts de l à \square dans G . Soit p_1 and p_2 ces deux chemins. Supposons qu’il existe un chemin différent p_3 de l à \square . On a deux cas possibles :

- p_3 est disjoint de p_1 et p_2 . Cela implique que $|\text{pred}(\square)| > 2$. C’est absurde car $|\text{pred}(\square)| = 2$.
- Sinon, puisque $|\text{pred}(\square)| = 2$, il existe $l' \neq l \in p_3$ tel que $l' \in p_1$ ou $l' \in p_2$ et $|\text{pred}(l')| > 1$. C’est aussi absurde car toutes les clauses de k^b -UCS sont binaires.

On déduit qu’il existe exactement deux chemins distincts de l à \square dans G . Le fait que l est le FUIP et le

même argument du second cas assurent que ces chemins sont disjoints.

Définition 5 (Ordre Circulaire). Soit $p_1 = \langle l, l_1^{p_1}, \dots, l_m^{p_1}, \square \rangle (m \geq 0)$ et $p_2 = \langle l, l_1^{p_2}, \dots, l_n^{p_2}, \square \rangle (n \geq 0)$ deux chemins disjoint de l à \square où $m + n > 0$. L’Ordre Circulaire (OC) des chemins p_1 et p_2 est défini par $OC(p_1, p_2) = \langle \text{var}(l_1^{p_1}), \dots, \text{var}(l_m^{p_1}), \text{var}(l_n^{p_2}), \dots, \text{var}(l_1^{p_2}) \rangle$.

Théorème 1. $\forall k \geq 2$, les k^b -UCSs sont UP-résilients.

Preuve. Soit $k \geq 2$ et ψ un k^b -UCS reconnu par le FUIP l dans un graphe d’implications G . Par le lemme 1, soit $p_1 = \langle l, l_1^{p_1}, \dots, l_m^{p_1}, \square \rangle (m \geq 0)$ et $p_2 = \langle l, l_1^{p_2}, \dots, l_n^{p_2}, \square \rangle (n \geq 0)$ les deux chemins disjoints de l à \square où $m + n = k - 1$ dans G . On suppose sans perte de généralité que $l_m^{p_1} = l'$ est le dernier littéral propagé. Il existe deux séquences de propagations possibles dont les graphes d’implications notés G et G' sont représentés dans Fig.3. On veut prouver que la transformation par max-résolution relativement à l’ordre $O = OC(p_1, p_2)$ est UP-résiliente :

- Les clauses propageant l ne sont pas supprimées après la transformation par max-résolution relativement à l’ordre O . Donc l peut être propagé si ses pré-décresseurs dans G sont affectés à vrai et la transformation est UP-résiliente pour l . Cet argument s’applique aussi à tous les littéraux impliqués dans la propagation de l .
- Tous les voisinages possibles des littéraux l' et \bar{l}' contiennent la clause vide. Ainsi, la transformation par max-résolution relativement à l’ordre O est UP-résiliente pour l' et \bar{l}' .
- Chaque littéral $l_j^{p_1}$ tel que $1 \leq j < m$ admet exactement un voisinage $\text{neigh}(l_j^{p_1}) = \{l_{j-1}^{p_1}, l_{j+1}^{p_1}\}$ qui ne contient pas la clause vide (on fixe $l_0^{p_1} = l$). L’étape de max-résolution sur $\text{var}(l_j^{p_1}) (j \neq m - 1)$ est de la forme :

$$\frac{\{\bar{l}, l_j^{p_1}\}, \{\bar{l}_j^{p_1}, l_{j+1}^{p_1}\}}{\{\bar{l}, l_{j+1}^{p_1}\}, \{\bar{l}, l_j^{p_1}, \bar{l}_j^{p_1}\}, \{l, \bar{l}_j^{p_1}, l_{j+1}^{p_1}\}}$$

La clause $c = \{l, \bar{l}_j^{p_1}, l_{j+1}^{p_1}\}$ assure la propagation de $l_{j+1}^{p_1}$ si $l_j^{p_1} \in \text{neigh}(l_{j+1}^{p_1})$ est affecté à vrai puisque \bar{l} est propagé par le dernier résolvant unitaire $\{\bar{l}\}$. De plus, pour $j = 1$, la clause $c' = \{\bar{l}, l_j^{p_1}, l_{j+1}^{p_1}\}$ assure la propagation de $l_1^{p_1}$ si $l, l_2^{p_1} \in \text{neigh}(l_1^{p_1})$ sont affectés à vrai. On déduit que la transformation est UP-résiliente pour $l_j^{p_1}$ où $1 \leq j < m$.

- Chaque littéral $l_j^{p_2}$ tel que $1 \leq j \leq n$ admet exactement un voisinage $\text{neigh}(l_j^{p_2}) = \{l_{j-1}^{p_2}, l_{j+1}^{p_2}\}$ qui ne contient pas la clause vide (on fixe $l_0^{p_2} = l$ et

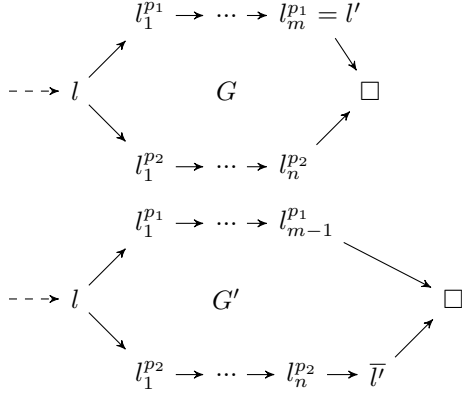


FIGURE 3 – Graphes d'implications représentant séquences de propagations possibles pour les k^b -UCSs

$l_{n+1}^{p2} = \bar{l}$). L'étape de *max-résolution* sur $\text{var}(l_j^{p2})$ ($j \neq 1$) est de la forme :

$$\frac{\{\bar{l}, \bar{l}_j^{p2}\}, \{l_j^{p2}, \bar{l}_{j-1}^{p2}\}}{\{\bar{l}, \bar{l}_{j-1}^{p2}\}, \{\bar{l}, \bar{l}_j^{p2}, l_{j-1}^{p2}\}, \{l, l_j^{p2}, \bar{l}_{j-1}^{p2}\}}$$

La clause $c = \{l, l_j^{p2}, \bar{l}_{j-1}^{p2}\}$ assure la propagation de l_j^{p2} si $l_{j-1}^{p2} \in \text{neigh}(l_j^{p2})$ est affecté à vrai puisque \bar{l} est propagé par le dernier résolvant unitaire $\{\bar{l}\}$. On déduit que la transformation est UP-résiliente pour l_j^{p2} où $1 < j \leq n$. Le seul littéral qui reste à vérifier est l_1^{p2} avec le voisinage $\text{neigh}(l_1^{p2}) = \{l, l_2^{p2}\}$. Pour cela, il suffit de regarder l'étape de *max-résolution* sur $\text{var}(l_2^{p2})$. En effet, cette étape génère la clause $c' = \{\bar{l}, l_2^{p2}, l_1^{p2}\}$ qui assure la propagation de l_1^{p2} si $l, l_2^{p2} \in \text{neigh}(l_1^{p2})$ sont affectés à vrai.

On conclut que la transformation par *max-résolution* relativement à l'ordre O est UP-résiliente et, donc, que les k^b -UCSs sont UP-résilients.

4 Discussion et Perspectives

Notre résultat établit l'UP-résilience des k^b -UCSs. Les résultats empiriques montrent que les 2^b -UCSs et 3^b -UCSs, correspondant respectivement aux motifs (P1) et (P2) de l'exemple 1, appris dans les solveurs BnB de l'état l'art, ont un impact positif sur leurs performances [5, 1]. Plus précisément, les propriétés 1 et 2 prouvent que les 2^b -UCSs et 3^b -UCSs sont UP-résilients par rapport à tout ordre d'application de la *max-résolution*, ce qui explique pourquoi leur apprentissage a un impact positif indépendamment de l'ordre utilisée. En revanche, des études empiriques sur le solveur AHMAXSAT dans [1] montrent que l'apprentissage des 4^b -UCSs et des 5^b -UCSs a un impact négatif sur ses performances. Cette différence entre les résultats théoriques et empiriques peut s'expliquer

par l'inadéquation des ordres d'application de la *max-résolution* utilisés. En effet, il a été montré dans [3] que l'ordre a un impact sur l'UP-résilience des transformations en comparant deux heuristiques : l'ordre de propagation inverse (RPO) et le plus petit résolvant intermédiaire (SIR). En particulier, le pourcentage moyen d'UP-résilience des transformations est comparativement plus élevé avec l'heuristique SIR. Dans le cas des k^b -UCSs, l'heuristique SIR devient inutilisable puisque tous les résolvants intermédiaires ont la même taille (binaires) comme indiqué dans la preuve du théorème 1. De plus, il est facile de vérifier que RPO n'assure pas toujours l'UP-résilience des transformations des k^b -UCSs quand $k > 3$.

La discussion précédente nous amène aux perspectives et applications de notre résultat, qui incluent la mise en œuvre et le test de l'ordre circulaire qui assure l'UP-résilience des k^b -UCSs afin d'étendre les motifs de l'état de l'art. De plus, nous avons réfléchi à plusieurs perspectives théoriques de notre résultat à savoir généraliser notre résultat pour les k -UCSs où exactement une clause de n'importe quelle taille participe au conflit et toutes les autres clauses sont binaires ou encore trouver un ordre d'application de la *max-résolution* qui maximise le pourcentage de l'UP-résilience pour les k -UCSs et, plus généralement, pour tout ensemble inconsistant.

References

- [1] A. Abramé and D. Habet. On the extension of learning for Max-SAT. In U. Endriss and J. Leite, editors, *STAIRS 2014*, volume 241, pages 1–10, 2014.
- [2] A. Abramé and D. Habet. AHMAXSAT : Description and evaluation of a branch and bound Max-SAT solver. *JSAT*, 9 :89–128, 2015.
- [3] A. Abramé and D. Habet. On the resiliency of unit propagation to max-resolution. In Q. Yang and M. Woolridge, editors, *IJCAI 2015*, pages 268–274, 2015.
- [4] M. L. Bonet, J. Levy, and F. Manyà. Resolution for max-sat. *JAIR*, 171 :606 – 618, 2007.
- [5] C. M. Li, F. Manyà, N. O. Mohamedou, and J. Planes. Resolution-based lower bounds in maxsat. *Constraints*, 15 :456–484, 2010.
- [6] C.-M. Li, F. Manyà, and J. Planes. Detecting disjoint inconsistent subformulas for computing lower bounds for max-sat. In *AAAI-06*, pages 86–91, 2006.
- [7] C. M. Li, F. Manyà, and J. Planes. New inference rules for max-sat. *JAIR*, 30 :321–359, 2007.
- [8] J. P. Marques-Silva and K. A. Sakallah. Grasp : A search algorithm for propositional satisfiability. *IEEE Transactions on Computers*, 48 :506 – 521, 1999.